



ویژه امتحانات دی ماه ۱۴۰۴

زودبسته

بانک آزمون های تشریحی ماز

یازدهم
ریاضی

آمار و احتمال





فهرست

بودجه بندی

شمارهٔ آزمون

جامع نیم سال اول

آزمون شمارهٔ ۱

فصل ۱

آزمون شمارهٔ ۲

آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: آمار و احتمال	ساعت شروع:	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	پایه یازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۱ صفحه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	
ردیف	سؤالات (پاسخ‌برگ دارد)	[استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می‌باشد]	
نمره			
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) گزاره $(\sim p \wedge p)$ ، یک گزاره همیشه درست است. ب) اگر p درست و q نادرست باشد، ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است. پ) اگر A یک مجموعه ۳ عضوی باشد، مجموعه $P(P(A))$ دارای ۱۲۸ عضو است. ت) اگر A و B و C سه مجموعه با مجموعه مرجع U و $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $(A \cup C) \subseteq (B \cup C)$ است.	۲	
۲	جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید. الف) تعداد زیرمجموعه‌های سره مجموعه $A = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \emptyset\}\}$ برابر است. ب) مجموعه جواب گزاره‌نمای $[x] - 1 = 0$ به صورت است. پ) اگر q و r باشد، ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge r$ ، درست است. ت) در پرتاب یک سکه و یک تاس، فضای نمونه‌ای دارای عضو است.	۲/۵	
۳	ارزش گزاره سوری « $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ » را تعیین کنید و نقیض آن را بنویسید.	۱/۲۵	
۴	با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$	۲	
۵	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها، درستی رابطه زیر را ثابت کنید. $(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B))' = B$	۳	
۶	الف) اگر $A = \{2k - 1 k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 3\}$ و $B = \{k \in \mathbb{Z} k - 2 \leq 1\}$ باشد، مجموعه $A \times B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید. ب) اگر $A = [-1, 3)$ و $B = [-3, 1)$ باشد، نمودار $B \times A$ را رسم کنید.	۱/۵	
۷	اگر $A = \{x + 2, 1, 4, y\}$ و $B = \{5, 7, z, t - 1\}$ باشد، در این صورت با فرض $A \times B = B \times A$ ، بیشترین مقدار برای $(x + y + z)$ را بیابید؟	۲/۲۵	
۸	اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، به طوری که $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ، حاصل $P(B')$ را بیابید؟	۱/۷۵	
۹	عددی به تصادف از بین اعداد ۱ تا ۵۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟	۲/۲۵	
۱۰	در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ (از راست به چپ) جملات متوالی یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{6}$ باشند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.	۱/۵	
۲۰	موفق باشید.		



نام و نام خانوادگی:	رشته: ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۰۷	مدت امتحان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه‌ساز نهایی درس: آمار و احتمال	ساعت شروع:	پایه یازدهم دوره متوسطه	تعداد صفحات: ۶ صفحه

گروه آموزشی ماز

آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی

ردیف	پاسخ‌نامه	نمره																																			
۱	<p>مصباح شو: </p> <p>الف) نادرست (۰/۵) ب) درست (۰/۵) پ) نادرست (۰/۵) ت) درست (۰/۵)</p> <p>گزاره‌ها و مجموعه‌ها: </p> <p>(۱) نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم و اگر ارزش p درست باشد، ارزش $\sim p$ نادرست است و وقتی ارزش p نادرست باشد، $\sim p$ درست است.</p> <p>(۲) هرگاه p و q دو گزاره باشند، جدول ارزش گزاره آن‌ها به صورت زیر است:</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <thead> <tr> <th>p</th> <th>q</th> <th>$\sim p$</th> <th>$p \wedge q$</th> <th>$p \vee q$</th> <th>$p \Rightarrow q$</th> <th>$p \Leftrightarrow q$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>د</td> </tr> <tr> <td>د</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>ن</td> </tr> <tr> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> </tr> <tr> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> </tr> </tbody> </table> <p>(۳) اگر مجموعه A با اعضای مشخص را در نظر بگیریم، مجموعه توانی A را به صورت P(A) نشان می‌دهیم و عضوهای آن همان زیرمجموعه‌های مجموعه A است. به طور مثال: $A = \{1, 2, 3\}$</p> <p>$P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$</p> <p>توجه کنید که تعداد زیرمجموعه‌های A یعنی تعداد اعضای P(A) برابر است با: $2^{ A }$</p> <p>(۴) برای دو مجموعه دلخواه A و B، به روش عضوگیری ثابت می‌شود:</p> <p>۱) $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap C \\ A \cap C \subseteq B \cup C \\ A \cup C \subseteq B \cup C \end{cases}$</p> <p>۲) $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap D \\ A \cap C \subseteq B \cup D \\ A \cup C \subseteq B \cup D \end{cases}$</p> <p>۳) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B' \\ B \subseteq A' \\ A - B = A \\ B - A = B \end{cases}$</p> <p>۴) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$</p>	p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	د	د	ن	د	د	د	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	ن	د	د	ن	د	د	ن	ن	ن	د	ن	ن	د	د	۲
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$																															
د	د	ن	د	د	د	د																															
د	ن	ن	ن	د	ن	ن																															
ن	د	د	ن	د	د	ن																															
ن	ن	د	ن	ن	د	د																															



مصباح شو: 

۲/۵

الف) ۷ (۰/۵) ب) $S = [1, 2)$ (۰/۵) پ) نادرست (۰/۵) - درست (۰/۵) ت) ۱۲ (۰/۵)

بررسی دقیق تر:

الف) می‌دانیم که $\emptyset = \{ \}$ است و همچنین می‌دانیم که تکرار عضوها در یک مجموعه، تاثیری بر تعداد عضوهای مجموعه ندارد، بنابراین مجموعه A

به صورت $A = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \emptyset \} \}$ است. پس تعداد زیرمجموعه‌های سره مجموعه A برابر است با: $2^{|A|} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

ب) مجموعه جواب گزاره‌نمای $[x] - 1 = 0$ برابر است با: $[x] - 1 = 0 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \Rightarrow S = [1, 2)$

پ) $\sim(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv \sim(\sim p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge \sim q) \wedge r$


می‌دانیم که ارزش گزاره $(p \wedge \sim q) \wedge r$ درست است، بنابراین ارزش r درست و ارزش $(p \wedge \sim q)$ هم درست است.

$r \equiv T$

$$(p \wedge \sim q) \equiv T \Rightarrow \begin{cases} p \equiv T \\ \sim q \equiv T \Rightarrow q \equiv F \end{cases}$$

$n(S) = 2 \times 6 = 12$

ت) در پرتاب یک سکه و یک تاس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

یادگیری بیشتر: 

۱) هر مجموعه Π عضو، تعداد 2^{Π} زیرمجموعه و $2^{\Pi} - 1$ زیرمجموعه سره دارد.
 ۲) هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیری از مجموعه مرجع (مجموعه‌ای که گزاره مورد بحث در آن معنی دارد). به جای متغیر یا متغیرهای آن تبدیل به یک گزاره شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.
 - در هر گزاره‌نما، مجموعه مقادیری را که می‌توان به جای متغیرهای آن قرار داد، تا این گزاره‌نما را به گزاره تبدیل کند، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌نامند و با حرف D نشان می‌دهند.

- برای پیدا کردن دامنه معادلات و نامعادلات کسری باید اعدادی را پیدا کنیم که مخرج را صفر نکنند.
 - برای پیدا کردن دامنه معادلات و نامعادلات رادیکالی با فرجه زوج، باید اعدادی را پیدا کنیم که زیر رادیکال را منفی نکنند.
 - در هر گزاره‌نما، مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر را که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما به گزاره درست تبدیل می‌شود، مجموعه‌جواب گزاره‌نما می‌نامند و با حرف S نشان می‌دهند.

$$\sqrt{2-x} < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1) 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D = (-\infty, 2] \\ 2) \sqrt{2-x} < 1 \Rightarrow 2-x < 1 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow S = (1, 2]$$

$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$ (۳)

۴) به مجموعه همه نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای آن آزمایش تصادفی می‌گویند و آن را با S نشان می‌دهند. به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، پیشامد می‌گویند.

مصباح شو: 

۱/۲۵

ارزش گزاره « $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ » نادرست است، زیرا $x = 0$ ، گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند. (۰/۲۵)

حال برای نوشتن نقیض این گزاره، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 + \frac{1}{x^2} < 2$$

سورها: 

سورها نمادهایی هستند که قبل از گزاره‌نما قرار می‌گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند. مهم‌ترین سورها عبارتند از: \exists (سور وجودی)، \forall (سور عمومی)، $\exists!$ (سور صفر)، $\exists!$ (سور وحدت).
 برای بیان مفاهیمی چون «به ازای هر x به ازای تمام مقادیر یا به ازای تمام مقادیر و ...» از نماد \forall استفاده شده و آن را سور عمومی می‌نامند. همچنین برای بیان مفاهیمی چون «وجود دارد یا لاقلاً یکی هست یا به ازای برخی مقادیر و ...» از نماد \exists استفاده شده و آن را سور وجودی می‌نامند.

خواندن گزاره‌های سوری	
$\forall x; p(x)$	$\exists x; p(x)$
هر x خاصیت p را دارد.	بعضی x ها خاصیت p را دارند.



برای تعیین نقیض گزاره‌های با سور عمومی و نقیض گزاره‌های با سور وجودی کافی است نوع سور را عوض کرده (یعنی به جای \forall از \exists و هم‌چنین به جای \exists از \forall استفاده کنیم) و گزاره‌نمای داده‌شده را نقیض کنیم، یعنی:

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

۲

مصحح شو:

جدول ارزش گزاره‌ها را تشکیل می‌دهیم.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim (p \leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

(۰/۵)

(۰/۵)

(۰/۵)

(۰/۵)

قوانین گزاره‌ها:

$\sim (\sim p) \equiv p$	$\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$	$\begin{cases} p \vee T \equiv T \\ p \vee F \equiv p \end{cases}$	$\begin{cases} p \wedge T \equiv p \\ p \wedge F \equiv F \end{cases}$	$\begin{cases} p \wedge \sim p \equiv F \\ p \vee \sim p \equiv T \end{cases}$
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{cases}$	$\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{cases}$	$\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$	$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$
$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$	$\begin{cases} \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$	$p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$	$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$	$(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv p \Leftrightarrow q$

۳

مصحح شو:

$$(A - (A \cap B')) \cup (B \cap (A \cap B)') = (A \cap (A \cap B')') \cup (B \cap (A \cap B)') \quad (۰/۵)$$

ابتدا به کمک رابطه $A - B = A \cap B'$ داریم:

$$(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B')) \quad (۰/۵)$$

حال به کمک رابطه $(A \cap B)' = A' \cup B'$ داریم:

$$\underbrace{((A \cap A') \cup (A \cap B))}_{\emptyset} \cup \underbrace{((B \cap A') \cup (B \cap B'))}_{\emptyset} \quad (۰/۵) \quad : A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

سپس با استفاده از رابطه توزیع‌پذیری $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ می‌دانیم که $\emptyset \cup A = A$ و $A \cap A' = \emptyset$ است، پس:

$$\underbrace{(A \cap B) \cup (B \cap A')}_{(۰/۵)} \xrightarrow{\text{رابطه توزیع‌پذیری}} \underbrace{B \cap (A \cup A')}_{\emptyset} = B \cap U = B \quad (۰/۵)$$

توجه داشته باشید که $A \cap U = A$ و $A \cup A' = U$ است.

قوانین مجموعه‌ها:

$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	ویژگی خودتوانی
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	ویژگی جابه‌جایی
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	ویژگی شرکت‌پذیری
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	ویژگی توزیع‌پذیری
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	ویژگی جذب
$A - B = A \cap B'$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$	دمورگان



$$A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 3\} = \{1, 3, 5\} \quad (0/25)$$

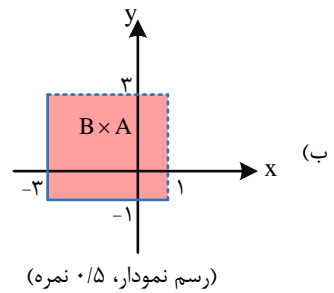
$$B = \{k \in \mathbb{Z} \mid |k-2| \leq 1\}$$

$$|k-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k-2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq k \leq 3 \Rightarrow B = \{1, 2, 3\} \quad (0/5)$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\} \quad (0/25)$$

$$A = [-1, 3)$$

$$B = [-3, 1)$$



تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه:

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x, y) متعلق به $A \times B$ ، همواره مؤلفه یا مختص اول، یعنی x باید از مجموعه A و متناظراً مؤلفه دوم، یعنی y باید از مجموعه B باشد.

می‌دانیم که اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند و $A \times B = B \times A$ باشد، آن‌گاه $A = B$ است. پس حالت‌های زیر را داریم:

$\begin{cases} x+2=5 \\ y=7 \\ z=4 \\ t-1=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2=5 \\ y=7 \\ z=1 \\ t-1=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2=7 \\ y=5 \\ z=4 \\ t-1=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2=7 \\ y=5 \\ z=1 \\ t-1=4 \end{cases}$
(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)

$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=4 \\ t=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=1 \\ t=5 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5 \\ y=5 \\ z=4 \\ t=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x=5 \\ y=5 \\ z=1 \\ t=5 \end{cases}$
(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)	(۰/۲۵)

در نتیجه؛ بیشترین مقدار برای $x + y + z$ ، برابر است با:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow (x+y+z) = 14 \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=5 \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow (x+y+z) = 14$$

راهنمای مصصح: نوشتن یکی از جواب‌های روبه‌رو کافی است و ۰/۲۵ نمره تعلق می‌گیرد.

دو مجموعه برابر:

دو مجموعه A و B را برابر می‌نامیم هرگاه اعضای دو مجموعه نظیر به نظیر با هم برابر باشند و به عبارت دیگر، هم $A \subseteq B$ و هم $B \subseteq A$ باشد، در این صورت می‌نویسیم: $A = B$

$$A = \{1, 1, 1, 2, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 3\} \Rightarrow A = B$$

در بسیاری از موارد ممکن است به طور مستقیم گفته نشود $A = B$ و برابر بودن مجموعه‌های A و B به یکی از صورت‌های زیر بیان شود:

۱) $A \cap B = A \cup B$ ۲) $A - B = B - A$ ۳) $A \cap B' = B \cap A'$

اگر $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ و $A \times B = B \times A$ ، آن‌گاه $A = B$



مصباح شو:

می‌دانیم که A و B دو پیشامد ناسازگار هستند، پس: $P(A \cap B) = 0$ ($0/25$)

از طرفی، $P(A) = \frac{1}{5}$ و $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ است، بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{=0} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{5} + P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{11}{20} = 0/55$$

$$P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20} = 0/45 \quad (0/25)$$

در نتیجه حاصل خواسته شده برابر است با:

قضایای احتمال:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$$

تذکر: هرگاه اشتراک دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ، تهی باشد، این دو پیشامد را ناسازگار می‌نامند.

مصباح شو:

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$n(S) = 500$$

$$500 \text{ تا } 1 \text{ بین } 3 \text{ مضرب‌های } n(A) = \left[\frac{500}{3} \right] = 166 \quad (0/25)$$

$$500 \text{ تا } 1 \text{ بین } 5 \text{ مضرب‌های } n(B) = \left[\frac{500}{5} \right] = 100 \quad (0/25)$$

$$500 \text{ تا } 1 \text{ بین } 3 \text{ و } 5 \text{ مضرب‌های } n(A \cap B) = \left[\frac{500}{3 \times 5} \right] = \left[\frac{500}{15} \right] = 33 \quad (0/25)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 166 + 100 - 33 = 233 \quad (0/25)$$

$$n(A' \cap B') \xrightarrow{\text{دمورگان}} n(A \cup B)' = n(S) - n(A \cup B) = 500 - 233 = 267 \quad (0/25)$$

$$P(A' \cap B') = \frac{n(A' \cap B')}{n(S)} = \frac{267}{500} \quad (0/25)$$

در نتیجه:

تعداد اعضای مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ که مضرب k باشند:

اگر $S = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ باشد، آنگاه:

(۱) تعداد اعضای S که مضرب k هستند، برابر است با: $\left[\frac{m}{k} \right]$.

(۲) تعداد اعضای S که هم مضرب k_1 و هم مضرب k_2 هستند، برابر است با: $\left[\frac{m}{[k_1, k_2]} \right]$ (منظور از $[k_1, k_2]$ ، کم‌م دو عدد k_1 و k_2 است.)



می‌دانیم که $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ به ترتیب از راست به چپ، جملات متوالی یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{6}$ می‌باشند، پس اگر $P(x)$ را برابر t فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} \text{جملات دنباله} : P(x), P(y), P(z) \\ \text{جملات دنباله} : t, (t + \frac{1}{6}), (t + \frac{2}{6}) \end{cases}$$

$$\underbrace{P(x) + P(y) + P(z) = 1}_{(0/25)} \Rightarrow t + \underbrace{(t + \frac{1}{6}) + (t + \frac{2}{6})}_{(0/25)} = 1$$

از طرفی:

$$\Rightarrow 3t + \frac{3}{6} = 1 \Rightarrow 3t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{6} \quad (0/25)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} P(x) = t \Rightarrow P(x) = \frac{1}{6} \quad (0/25) \\ P(y) = t + \frac{1}{6} \Rightarrow P(y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (0/25) \\ P(z) = t + \frac{2}{6} \Rightarrow P(z) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (0/25) \end{cases}$$

 احتمال‌های غیرهم‌شانس:

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده (پیشامد تک‌عضوی) از فضای نمونه‌ای $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه غیرهم‌شانس می‌نامند.

برای حل مسائل مربوط به احتمال‌های غیرهم‌شانس، احتمال یکی از برآمدهای فضای نمونه‌ای را برابر X فرض می‌کنیم و احتمال سایر برآمدهای داده شده در مسئله را برحسب X به دست می‌آوریم. سپس مجموع همه احتمال‌ها را برابر «۱» قرار می‌دهیم (چون در همه آزمایش‌های تصادفی، همواره $P(S) = 1$ است). یعنی:

$$P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n) = 1$$

اگر $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، آن‌گاه برای محاسبه احتمال رخداد پیشامد A باید به صورت زیر عمل کنیم:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_k)$$





به نام خدا

سؤالات آزمون نهایی درس: آمار و احتمال		تعداد صفحه: ۱	رشته:	ریاضی و فیزیک	ساعت شروع:
دوره دوم متوسطه - یازدهم		تاریخ آزمون:	۱۴۰۳/۰۹/۲۳	نام و نام خانوادگی:	مدت زمان: ۴۰ دقیقه
آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی گروه آموزشی ماز					
ردیف	سؤالات (پاسخبرگ دارد)	نمره			
۱	درست یا نادرست بودن هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) گزاره $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$ یک گزاره همواره درست است. ب) اگر p گزاره‌ای درست و q و r دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره $(p \wedge r) \Leftrightarrow \sim q$ ، نادرست است. پ) اگر $A = \{x - y, 15\}$ ، $B = \{x^2 - y^2, 3\}$ و $A \times B = B \times A$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{x}{y}$ برابر $\frac{1}{4}$ است.	۱.۵			
۲	هر جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) تعداد زیرمجموعه‌های سره (محض) مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ برابر است. ب) اگر p یک گزاره نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ، است. پ) اگر $A - B = \emptyset$ باشد، آن‌گاه $B' \cap (A \cup B) = \dots\dots\dots$ است.	۱.۵			
۳	با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، درستی رابطه زیر را نشان دهید. $[(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)] \equiv p \Leftrightarrow \sim q$	۳.۵			
۴	ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.	۱.۷۵			
۵	گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها (\exists یا \forall) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید. « حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگتر یا مساوی ۲ است »	۱			
۶	ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کرده و سپس نقیض آن را بنویسید. $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x) \vee (\exists x, y, z \in \mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+z)^2 = 0)$	۲			
۷	اگر سه عضو از مجموعه A کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۱۲ واحد کم می‌شود. مجموعه A چند عضوی است؟	۱.۵			
۸	اگر A, B, C و D چهار مجموعه با مجموعه مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن‌گاه: $A \cap C \subseteq B \cup D$.	۱.۷۵			
۹	با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید. (توجه: از نمودار ون استفاده نکنید). $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$	۱.۷۵			
۱۰	درستی تساوی مقابل را بررسی کنید. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$	۲.۲۵			
۱۱	اگر $A = [1, 2]$ و $B = \{1, 2\}$ باشند، حاصل ضرب دکارتی $(A \times B) \cup (B \times A)$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۱.۵			
	موفق باشید.	۲۰			



راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: آمار و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - یازدهم	تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۹/۲۳
مدت زمان: ۴۰ دقیقه	ساعت شروع:

گروه آموزشی ماز / آزمون شبیه‌ساز امتحان نهایی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																																			
۱	<p>مصصح شو!</p> <p>الف) درست (۰/۵) ب) درست (۰/۵) پ) نادرست (۰/۵)</p> <p>بررسی دقیق‌تر:</p> <p>الف) درست است. ببینید:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>p</th> <th>q</th> <th>~ p</th> <th>~ q</th> <th>p ∧ ~ q</th> <th>~ p ∨ q</th> <th>(p ∧ ~ q) ∨ (~ p ∨ q)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> </tr> <tr> <td>د</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>د</td> </tr> <tr> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> </tr> <tr> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> <td>ن</td> <td>د</td> <td>د</td> </tr> </tbody> </table> <p>ب) درست است.</p> <p>اگر p گزاره‌ای درست و r گزاره‌ای نادرست باشد، آن‌گاه $p \wedge r \equiv F$ است، پس:</p> <p>۱.۵ $(p \wedge r) \Leftrightarrow \sim q \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$</p> <p>پ) نادرست است.</p> <p> $\begin{cases} A = \{x - y, 15\} \\ B = \{x^2 - y^2, 3\} \end{cases} \xrightarrow[A, B \neq \emptyset]{A \times B = B \times A} A = B$ </p> <p> $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 15 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 15 \Rightarrow (x + y) = 5 \end{cases}$ </p> <p> $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = 4$ </p> <p>۲۰ شو</p> <p>اگر A و B دو مجموعه ناتهی باشند، به طوری که $A \times B$ و $B \times A$ برابر باشند، آن‌گاه قطعاً $A = B$ است.</p>	p	q	~ p	~ q	p ∧ ~ q	~ p ∨ q	(p ∧ ~ q) ∨ (~ p ∨ q)	د	د	ن	ن	ن	د	د	د	ن	ن	د	د	ن	د	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د	د	ن	د	د	
p	q	~ p	~ q	p ∧ ~ q	~ p ∨ q	(p ∧ ~ q) ∨ (~ p ∨ q)																															
د	د	ن	ن	ن	د	د																															
د	ن	ن	د	د	ن	د																															
ن	د	د	ن	ن	د	د																															
ن	ن	د	د	ن	د	د																															
۲	<p>مصصح شو!</p> <p>الف) ۱۵ (۰/۵) ب) درست (۰/۵) پ) \emptyset (تهی)، { } (۰/۵)</p> <p>بررسی دقیق‌تر:</p> <p>۱.۵ $A = \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{n=4} A$ تعداد زیرمجموعه‌های سره مجموعه $= 2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$ (الف)</p>																																				

زیرمجموعه‌های محض

اگر از زیرمجموعه‌های یک مجموعه، خود آن مجموعه را کنار بگذاریم، سایر زیرمجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های محض یا سره آن مجموعه می‌گوییم. بنابراین اگر $A \neq B$ و $A \subseteq B$ ، آن‌گاه A را زیرمجموعه محض (سره) مجموعه B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subset B$. در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های سره برابر است با: $2^n - 1$

(ب) می‌دانیم که گزاره‌ای نادرست است، بنابراین:

$$\underbrace{(p \wedge q) \Rightarrow r}_{F} \equiv \underbrace{F \Rightarrow r}_{T} \equiv T$$

به انتقای مقدم

۲۰ شو

هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند: ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتقای مقدم درست است.

(پ) اگر $A - B = \emptyset$ باشد، آن‌گاه $A \subseteq B$ است و بالعکس.

$$\frac{A \subseteq B}{A \cup B = B} \rightarrow B' \cap (A \cup B) = B' \cap B = \emptyset$$

مصحح شو!

(مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۱۵)

جدول ارزش گزاره‌ها را رسم می‌کنیم:

p	q	~ p	~ p ∨ q	~ p ∧ q	(~ p ∨ q) ⇔ (~ p ∧ q)	~ q	p ⇔ ~ q
د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	ن	ن	د	ن

(۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵) (۰/۵)

پس با توجه به ستون‌های ششم و هشتم از سمت چپ، هم‌ارزی برقرار است. (۰/۵)

راهنمای مصحح

۳.۵

به هر کدام از ستون‌های سوم تا هشتم از سمت چپ، در صورت صحیح بودن، (۰/۵) نمره تعلق می‌گیرد.

هر آنچه که باید در مورد ترکیب‌ها بدانید!

p	~ p
د	ن
ن	د

(۱) جمله‌ای خبری که معنایی متضاد و مخالف با خود گزاره دارد را **نقیض گزاره** می‌نامند.

* نقیض گزاره p را با $\sim p$ نشان می‌دهند و به علامت « \sim » **ناقض** می‌گویند.

(۲) اگر p و q دو گزاره باشند، **ترکیب فصلی** آن‌ها را به صورت $p \vee q$ نشان می‌دهند و « p یا q » خوانده می‌شود.

* ارزش گزاره حاصل از ترکیب فصلی دو گزاره فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزاره مرکب، درست است.

p	q	p ∨ q
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۳) اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی آنها را با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند و « p و q » خوانده می‌شود.

* ارزش گزاره حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند و در غیر این صورت ارزش این گزاره مرکب، نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

۴) اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب شرطی آنها را با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهند و «اگر p آنگاه q » خوانده می‌شود.

* در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ ، گزاره p را مقدم و q را تالی می‌نامند.

* ارزش گزاره حاصل از ترکیب شرطی دو گزاره، فقط وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، در غیر این صورت ارزش ترکیب شرطی درست است.

* اگر مقدم یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش آن ترکیب شرطی درست است و به ارزش تالی بستگی ندارد. (این قانون را انتفای مقدم می‌نامند).

$$F \Rightarrow q \equiv T$$

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

* اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، گزاره $q \Rightarrow p$ را عکس ترکیب شرطی می‌نامند.

* اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، آنگاه گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض ترکیب شرطی می‌نامند.

* عکس نقیض هر ترکیب شرطی با خود ترکیب شرطی هم‌ارز است، یعنی همواره داریم: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

۵) به ترکیب عطفی هر گزاره شرطی و عکس آن یعنی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، ترکیب دوشروطی گفته می‌شود و به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان داده می‌شود و به صورت‌های زیر خوانده می‌شود:

۱. اگر p آنگاه q و برعکس. ۲. p اگر و تنها اگر q . ۳. شرط لازم و کافی برای q است.

* ارزش ترکیب دوشروطی زمانی درست است که دو گزاره p و q هم‌ارز باشند، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند، در غیر این صورت ارزش آن نادرست است.

* اگر $p \Leftrightarrow q$ یک گزاره دوشروطی باشد، آنگاه گزاره $q \Leftrightarrow p$ را عکس آن می‌نامند که هم‌ارز با خود گزاره است.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۶) اتحادهای مهم

$$\bigcirc \Rightarrow \square \equiv \sim \bigcirc \vee \square$$

گزاره‌های همواره درست یا همواره نادرست

$p \vee \sim p \equiv T$	$p \vee T \equiv T$	$p \Rightarrow T \equiv T$	$p \Leftrightarrow p \equiv T$
$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \wedge F \equiv F$	$F \Rightarrow p \equiv T$	$p \Leftrightarrow \sim p \equiv F$

نقیض ترکیب فصلی و عطفی و شرطی و دوشروطی

قانون دمورگان $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	قانون دمورگان $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$	$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \equiv p \Leftrightarrow q$

قوانین ترکیب‌های فصلی و عطفی

$\begin{cases} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{cases}$ <p>خودتوانی</p>	$\begin{cases} p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \end{cases}$ <p>شرکت‌پذیری</p>	$\begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$ <p>جذب</p>
$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$ <p>جاب‌جایی</p>	$\begin{cases} p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{cases}$ <p>توزیع‌پذیری</p>	$\begin{cases} p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q \\ p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q \end{cases}$ <p>هم‌پوشانی</p>

قانون زیر در ساده کردن عبارت‌هایی که دو بار ترکیب شرطی در آن‌ها به کار رفته بسیار مؤثر است (این قانون به **عطف مقدمات** شهرت دارد).

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

مصحح شو!

(مرتبط با مثال صفحه ۹) به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

$$\underbrace{(n^2 \text{ مضرب } 3 \text{ نیست} \Rightarrow n \text{ مضرب } 3 \text{ است})}_{(0/25)} \equiv \underbrace{(n \text{ مضرب } 3 \text{ نیست} \Rightarrow n^2 \text{ مضرب } 3 \text{ نیست})}_{(0/25)}$$

چنانچه n مضرب ۳ نباشد، یعنی باقی‌مانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است.

۱.۷۵

$$\underbrace{n = 3k + 1}_{(0/25)} \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow \underbrace{n^2 = 3k' + 1}_{(0/25)} \Rightarrow n^2 \text{ مضرب } 3 \text{ نیست}$$

$$\underbrace{n = 3k + 2}_{(0/25)} \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow \underbrace{n^2 = 3k'' + 1}_{(0/25)} \Rightarrow n^2 \text{ مضرب } 3 \text{ نیست}$$

پس در هر صورت، n^2 مضرب ۳ نیست، در نتیجه حکم سوال برقرار است. (۰/۲۵)

مصحح شو!

(مرتبط با تمرین ۸ صفحه ۱۵) می‌خواهیم گزاره «حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است»

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}}_{(0/25)} ; \underbrace{x + \frac{1}{x}}_{(0/25)} \geq 2$$

را با نماد سورها بنویسیم:

ارزش گزاره نادرست است، (۰/۲۵) زیرا به عنوان مثال $x = -1$ مثال نقض است چرا که $-1 + \frac{1}{-1} = -2 \geq 2$ برقرار نیست. (۰/۲۵)

۱

۲۰ شو

برای بیان مفاهیمی چون «به ازای هر یا به ازای جميع مقادیر یا به ازای تمام مقادیر و ...» از نماد \forall استفاده شده و آن را **سور عمومی** می‌نامند.

همچنین برای بیان مفاهیمی چون «وجود دارد یا لاقلاً یکی هست یا به ازای بعضی مقادیر و ...» از نماد \exists استفاده شده و آن را **سور وجودی** می‌نامند.

خواندن گزاره‌های سوری	
$\forall x; p(x)$	$\exists x; p(x)$
هر x خاصیت p را دارد.	بعضی x ها خاصیت p را دارند.

مصصح شو!

$$\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x)}_{\text{درست (۰/۲۵)}} \vee \underbrace{(\exists x, y, z \in \mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+z)^2 = 0)}_{\text{درست (۰/۲۵)}}$$

بنابراین ارزش کل گزاره درست است. (۰/۲۵)

بررسی دقیق‌تر:

ابتدا ارزش گزاره مرکب $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x) \vee (\exists x, y, z \in \mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+z)^2 = 0)$ را تعیین می‌کنیم، گزاره $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 > 2x)$ ، یک گزاره با ارزش درست است، زیرا به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرار است، از طرفی گزاره $(\exists x, y, z \in \mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+z)^2 = 0)$ نیز یک گزاره با ارزش درست است، زیرا به ازای $x=1$ و $y=-z$ برقرار است. بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ ، درست است. حال نقیض این گزاره را می‌نویسیم:

$$\underbrace{(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 2 \leq 2x)}_{\text{(۰/۵)}} \wedge \underbrace{(\forall x, y, z \in \mathbb{R}; (x-1)^2 + (y+z)^2 \neq 0)}_{\text{(۰/۵)}}$$

مصصح شو!

(مرتبط با تمرین ۲ صفحه ۳۳)

فرض می‌کنیم که مجموعه A ، دارای n عضو باشد، پس این مجموعه دارای 2^n زیرمجموعه است. اگر ۳ عضو از اعضای مجموعه A کم کنیم، در این صورت از تعداد زیرمجموعه‌های A ، ۱۱۲ واحد کم می‌شود، یعنی در این حالت، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $2^n - 112$ است. از طرفی وقتی ۳ عضو از اعضای مجموعه A کم می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، برابر 2^{n-3} است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{2^n - 112 = 2^{n-3}}_{\text{(۰/۵)}} &\Rightarrow \underbrace{2^n - 112 = 2^n \times 2^{-3}}_{\text{(۰/۲۵)}} \Rightarrow 2^n - 112 = \frac{1}{8} \times 2^n \\ \Rightarrow 2^n - \frac{2^n}{8} = 112 &\Rightarrow \underbrace{\frac{7}{8} \times 2^n = 112}_{\text{(۰/۲۵)}} \Rightarrow 2^n = \frac{112 \times 8}{7} \Rightarrow \underbrace{2^n = 128 = 2^7}_{\text{(۰/۲۵)}} \Rightarrow \underbrace{n = 7}_{\text{(۰/۲۵)}} \end{aligned}$$

در نتیجه مجموعه A ، ۷ عضوی است.

مصصح شو!

(مرتبط با تمرین ۶ صفحه ۳۳)

$$\begin{aligned} \underbrace{\forall x; [x \in (A \cap C)]}_{\text{(۰/۲۵)}} &\Rightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in C}_{\text{(۰/۲۵)}} \xrightarrow{\substack{A \subseteq B \\ C \subseteq D}} \underbrace{x \in B \wedge x \in D}_{\text{(۰/۲۵)}} \\ \xrightarrow{(*)} &\underbrace{x \in B \vee x \in D}_{\text{(۰/۲۵)}} \Rightarrow \underbrace{x \in (B \cup D)}_{\text{(۰/۲۵)}} \end{aligned}$$

$$\forall x; \underbrace{[x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cup D)]}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{(A \cap C) \subseteq (B \cup D)}_{(0/25)}$$

بنابراین داریم:

(*) توجه کنید که اگر ارزش $p \wedge q$ درست باشد، آن گاه p درست و q نیز درست خواهد بود و در نتیجه ارزش $p \vee q$ درست است.

مصحح شو!

(مرتبط با تمرین ۱۱ صفحه ۳۴)

$$(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)$$

ابتدا عبارت درون کروشه را ساده می کنیم:

$$(B \cap A) - B' = (B \cap A) \cap B = B \cap A \quad (0/25)$$

$$(A' \cap B) \cup \underbrace{((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)}_{B \cap A} = \underbrace{(B \cap A')}_{(0/5)} \cup \underbrace{(B \cap A)}_{(0/5)} = \underbrace{B \cap (A' \cup A)}_{(0/5)} = \underbrace{B \cap U}_{(0/25)} = \underbrace{B}_{(0/25)}$$

۱.۷۵

قوانین مجموعه‌ها

اگر A و B دو مجموعه دلخواه و A' و B' متمم‌های آن‌ها باشند، آن‌گاه:

جذب	تبدیل تفاضل به اشتراک	دمورگان
$A \cup (A \cap B) = A$	$A - B = A \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$A \cap (A \cup B) = A$	$A - B = B' - A'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

اگر A, B, C سه مجموعه دلخواه باشند، آن‌گاه:

توزیع پذیری	شرکت پذیری
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

۹

مصحح شو!

(مرتبط با تمرین ۱۲ صفحه ۳۴)

می خواهیم نشان دهیم که:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \underbrace{(A \cup B) \cap (A \cap B)'}_{(0/25)} = \underbrace{(A \cup B) \cap (A' \cup B')}_{(0/25)}$$

۲.۲۵

$$= \underbrace{[(A \cup B) \cap A']}_{(0/5)} \cup \underbrace{[(A \cup B) \cap B']}_{(0/5)} = \underbrace{[(A \cap A') \cup (B \cap A')]}_{(0/5)} \cup \underbrace{[(A \cap B') \cup (B \cap B')]}_{(0/5)}$$

$$= \underbrace{(B - A) \cup (A - B)}_{(0/25)}$$

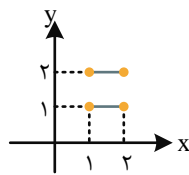
۱۰

مصحح شو!

(مرتبط با فعالیت صفحه ۳۱)

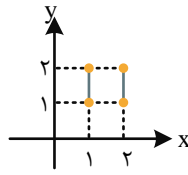
$$A = [1, 2]$$

$$B = \{1, 2\}$$



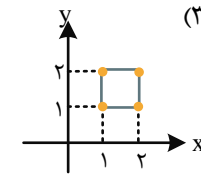
$A \times B$

(۰/۵)



$B \times A$

(۰/۵)



$(A \times B) \cup (B \times A)$

(۰/۵)

راهنمای مصحح

به رسم هر یک از نمودارها (۰/۵) نمره تعلق می‌گیرد.

ضرب دکارتی

برای رسم نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ باید اعضای A را روی محور x و اعضای B را روی محور y در نظر بگیریم. حال به چند حالت مهم برمی‌خوریم:

۱.۵

۱۱

A و B هر دو بازه‌ای	A و B هر دو چند عضوی	A بازه‌ای و B چند عضوی	A چند عضوی و B بازه‌ای
$A \times B$ سطح یک مربع یا مستطیل	$A \times B$ چندین نقطه	$A \times B$ چند پاره‌خط موازی محور x ها	$A \times B$ چند پاره‌خط موازی محور y ها
$A = (1, 3), B = [1, 2]$	$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$	$A = [1, 4], B = \{1, 2, 3\}$	$A = \{2, 3\}, B = (1, 2]$

۲۰

موفق باشید.